Historia Mathematica 10 (1983) 360-367

EIN VERMESSUNGSPROBLEM REIST VON CHINA NACH PARIS

BY KURT VOGEL
D-8000 MÜNCHEN 40,
ISOLDENSTRASSE 14,
BUNDESREPUBLIK DEUTSCHLAND

SUMMARIES

This paper treats the history of a surveying problem in which the height of a mountain or tower as well as its distance from the observer is to be determined in cases where the distance between observer and object is not passable. This problem arises in works by Chinese (Liu Hui), Indians (Āryabhaṭa, Brahmagupta), Arabs (al-Bīrūnī) and in the Christian Middle Ages (Geometria incerti auctoris, Hugo de Sancto Victore), in which the examples and methods of solution are all similar.

Der Aufsatz behandelt die Geschichte eines Vermessungsproblems, bei der die Höhe eines Berges oder Turms sowie der Abstand vom Beobachter bestimmt werden sollen, wenn das Gelände zwischen Beobachter und Objekt nicht zugänglich ist. Dieses Problem begegnet uns bei den Chinesen (Liu Hui), Indern (Āryabhaṭa, Brahmagupta), Arabern (al-Bīrūnī) und im christlichen Abendland (Geometria incerti auctoris, Hugo de Sancto Victore), wobei die Beispiele und Lösungsverfahren einander ähneln.

Die Bestimmung von Entfernungen in der Ebene wie die einer Flußbreite oder die Vermessungen der Höhe eines Berges oder Turmes gehören zu den Aufgaben ziviler oder militärischer Fachleute, zu denen man die ägyptischen Harpedonapten, die indischen Seilspanner, die römischen Agrimensoren rechnen wird. Das älteste Werk darüber einschließlich des dabei benötigten technischen Instrumentariums schrieb Heron [1903, 187-315]. In seiner Vermessungslehre, der *Dioptra*, fehlte aber noch ein später vielfach studiertes Problem. Es handelt sich um die Vermessung der Höhe und des Abstandes eines Berges oder Turmes, wenn das Gelände zwischen dem Beobachtungsort und dem Objekt nicht zugänglich ist.

Erstmals steht eine derartige Aufgabe in der Schrift *Die Insel im Meer* [van Hée 1938], mit der Liu Hui (3.Jahrhundert nach Christus) eine Ergänzung geben will zum letzten Buch der *Neun Bücher arithmetischer Technik* [Chiu Chang Suan Shu 1968, 102], in dem auch Vermessungsaufgaben vorgeführt werden. Der Text der ersten von den neun Aufgaben lautet:

Jetzt soll eine Insel im Meer anvisiert werden. Man stelle zwei Stäbe mit der gemeinsamen Höhe von 3 Klaftern

0315-0860/83 $3.00

[= 30 Fuß = 5 Schritt] in einem Abstand von 1000 Schritt auf, und zwar so, daß der hintere mit dem vorderen Stab in Visierlinie steht. Wenn man sich vom vorderen Stab 123 Schritt nach rückwärts bewegt und mit dem Auge am Boden die Bergspitze der Insel anvisiert, so deckt sich diese mit dem oberen Ende des Stabes. Wenn man sich vom hinteren Stab 127 Schritt rückwärts bewegt und mit dem Auge am Boden die Bergspitze der Insel anvisiert, deckt sich diese wiederum mit dem oberen Ende des Stabes. Gefragt ist die Höhe der Insel und ihre Entfernung vom (vorderen) Stab. [van Hée 1938, 269]

Anschließend gibt Liu Hui die Antwort: Höhe der Insel ist 4 Meilen 55 Schritt (1 Meile = 300 Schritt) und der Abstand vom ersten Stab 102 Meilen 150 Schritt.

Dann beschreibt Liu Hui das Berechnungsrezept, das mit Verwendung der Bezeichnungen in der Abbildung 1--Liu hat keine Zeichnung--folgendermaßen aussieht:

$$\text{Höhe der Insel} \quad x + s = \frac{s \cdot d}{d_2 - d_1} + s. \tag{F$_1$}$$

$$\text{Entfernung} \quad y = \frac{d_1 \cdot d}{d_2 - d_1}. \tag{F$_2$}$$

Die beiden Formeln lassen sich aus der Ähnlichkeit der drei Paar Dreiecke (*AKC* und *ABE*; *AKF* und *ABH*; *ACF* und *AEH*) auf verschiedene Weise ableiten. Am einfachsten ist:

$$CF:EH = AC:AE = AK:AB = BD:BE \quad \text{oder} \quad \frac{d}{d + d_2 - d_1} = \frac{x}{x + s} = \frac{y}{y + d_1}$$

was sofort die Formeln (F_1) und (F_2) ergibt.

Liu Hui hat nichts über die Herleitung seiner Rezepte geschrieben; sein Kommentar zur "Meeresinsel" hätte vielleicht Aufklärung gegeben. Er ging verloren wie vieles alte mathematische Schrifttum. Dieses ist nur erhalten geblieben dadurch, daß man in der "Kaiserlichen Enzyklopädie" der Mingzeit das, was sich wiederfinden ließ, sammelte (1403-1407). Auch in einem neuen Projekt, der

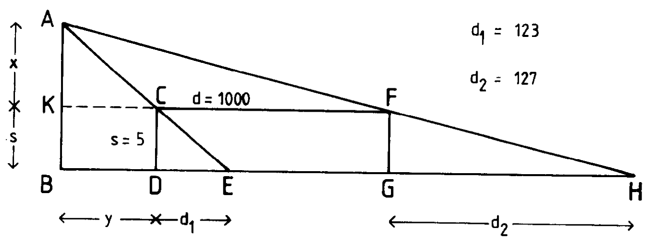

Abb. 1

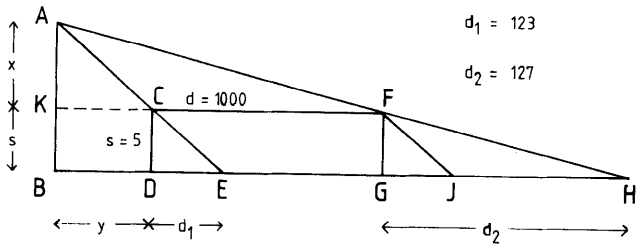

Abb. 2

"Kaiserlichen Handschriftenbibliothek" (beginnend 1773), erscheinen die alten mathematischen Schriften wiederhergestellt, wie die "Meeresinsel" durch Tai Chen (1724-1777) oder der Kommentar dazu durch seinen jüngeren Zeitgenossen Li Huang [Kogelschatz 1981].

Aus Li Huangs Zeichnung zu unserem Vermessungsproblem (Abb. 2) sieht man, daß er mit einer Parallele *FJ* zu *ACE* beginnt. Wenn wir die Fachwörter Li Huangs für die einzelnen Strecken durch Buchstaben ersetzen, sieht seine Ableitung der Formeln (F_1) und (F_2) so aus:

> *Zu GEDB parallel verlaufend, ziehe FCK, dann sind KB, CD, FG alle gleich. Zu CE parallel ziehe FJ, dann sind JG und ED gleich. Die Gestalt FGH ist der Gestalt AKF ähnlich ("gleiches Muster"). Die Gestalt FGJ ist der Gestalt AKC ähnlich. Die Gestalt FGJ hat als Teilgestalt von FGH dieselbe Kurzkathete FG, während HJ die Differenz der Langkatheten darstellt. Die Gestalt AKC hat als Teilgestalt von AKF dieselbe Kurzkathete AK, während FC die Differenz der Langkatheten darstellt. Nun verhält sich die kleine Langkatheten-Differenz HJ zur kleinen Kurzkathete FG wie die große Langkatheten-Differenz FC zur großen Kurzkathete AK, so daß sich AK ermitteln läßt. Fügt man die Stabhöhe KB hinzu, so erhält man AB und damit die Höhe der Insel.* [ungedruckte Übersetzung von Kogelschatz]

Auch die Berechnung der Entfernung *BD* wird in gleicher Weise beschrieben. Es ist *HJ*:*JG* = *FC*:*CK*. "Auf diese Weise erhält man die Entfernung der Insel vom vorderen Stab." Es folgt noch das Einsetzen der Zahlenwerte in (F_1) und (F_2).

Zwei Jahrhunderte nach Liu Hui taucht das Problem bei den *Indern*, bei Āryabhaṭa, auf. Im Vers 12 des mathematischen Kapitels im Āryabhaṭīya heißt es:

> *Der Schatten, multipliziert mit dem Abstand der Spitzen der Schatten, dividiert durch die Differenz (der Schatten) ist die eine Kathete* (koṭī). koṭī *multipliziert mit dem Gnomon, dividiert durch den Schatten, ist* bhujā *[der Arm].* [Elfering 1975, 121]

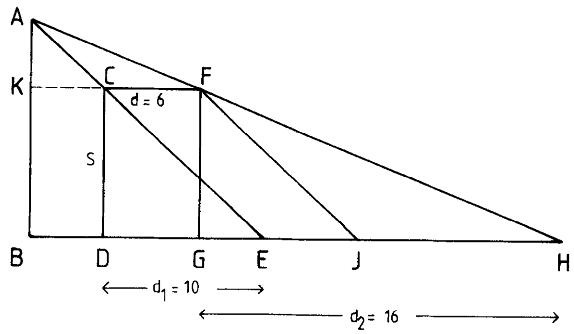

Abb. 3

Die waagrechte Kathete (siehe Abb. 2) ist also

$$BE = y + d_1 = \frac{d_1 \cdot d}{d_2 - d_1} + d_1 = \frac{d_1 \cdot (d + d_2 - d_1)}{d_2 - d_1},$$

und die andere Kathete ist

$$AB = \frac{s \cdot (d + d_2 - d_1)}{d_2 - d_1}.$$

Auch sonst ist noch etwas anders geworden, nämlich die Einkleidung des Problems. Es ist nicht mehr eine Aufgabe der Feldmessung. Von einer Lampe auf einem Lampenträger fällt das Licht auf zwei Stäbe [*śaṅku*], und es soll jetzt die Entfernung des Lampenträgers von den Enden der Schatten bestimmt werden.

Der Kommentator Parameśvara bringt ein Zahlenbeispiel, wobei der zweite Gnomon innerhalb des ersten Schattens steht (Abb. 3). Seine Zahlenwerte sind: $d_1 = 10$; $d_2 = 16$; Entfernung der beiden Schattenspitzen $d + d_2 - d_1 = 12$, also $d = 6$. Nicht erwähnt ist $s = 12$; der Gnomon ist immer in 12 Teile (Finger) geteilt. So ist dann die Kathete *bhujā* 24 und die beiden *koṭī* 20 und 32.

Auch bei späteren indischen Mathematikern ist das Schattenproblem anzutreffen, so bei Brahmagupta [Colebrooke 1917, 318]. Zu seiner allgemeinen Regel gibt Pṛthūdakasvāmin die Zahlenwerte $d_1 = 15$, $d_2 = 18$, $d = 15 + 7 = 22$. Für s wird wieder 12 angenommen. So ist die Höhe der Lampe 100, und die beiden Grundlinien zu den Spitzen der Schatten sind 125 und 150.

Ein Beispiel in Bhāskaras Līlāvatī [Banerji 1927, 163 f., Sect. 245] hat $d_1 = 8$, $d_2 = 12$, $d + d_2 - d_1 = 52$, also $d = 48$. Wieder mit $s = 12$ ist die "Erhebung des Lichtes" 156 Finger = 6 1/2 Ellen und die Entfernungen zu den Schattenspitzen 104 und 156.

Das indische Wissen fand weitere Verbreitung. Es ging an die *Araber* durch Übersetzungen aus dem Sanskrit z.B. auch des al-Bīrūnī, eines der größten Gelehrten des Islam. In seinem astro-

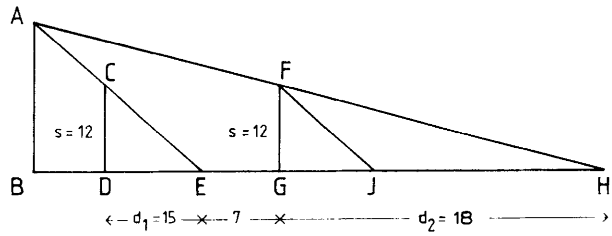

Abb. 4

nomischen Werk "Ausführliche Abhandlung über die Schatten" steht auch ein Kapitel "Über die Bestimmung von Entfernungen auf der Erde und der Höhen von Bergen" [Kennedy 1976]. In ihm bringt er unter ausdrücklicher Berufung auf Brahmagupta, den er auch sonst öfters zitiert, die genannte Aufgabe, in der das Licht auf einem Minarett auf zwei Gnomone fällt [Kennedy 1976, Vol. I, 279; Vol. II, Sect. 149, 161 f.]. In der Zeichnung (Abb. 4) ist wieder durch die Spitze der zweiten Stange die Parallele zum Strahl ACE gezogen. Augh die gewählten Zahlenwerte sind dieselben wie bei Pṛthūdakasvāmin. In den anderen Kapiteln bestimmt al-Bīrūnī die Richtungen mit dem Astrolab.

Der Reiseweg unseres Problems von den Arabern ins *christliche Abendland*, wo es ja angekommen ist, liegt noch im Dunkel. Man möchte es bei Leonardo von Pisa vermuten, dem Kenner arabischer Mathematik und Astronomie. Er kennt den Quadranten und beschreibt ihn [Boncompagni 1862, 204 f.]. Seine Beispiele beziehen sich aber nur auf den einfachen Fall der Messung von einem Standpunkt aus.

Anders steht es mit der Schrift, in der unser Problem zum erstenmal wieder sichtbar wird. Es ist das 3. Buch der *Geometria incerti auctoris*, das früher Gerbert zugeschrieben wurde [Bubnov 1899, 310-335]. Man weiß nicht, woher es stammt; im Corpus der römischen Agrimensoren ist es nicht enthalten [Bubnov 1899, 311: III, 1-26 *ex incerto opusculo*]. Die ältesten Handschriften (London, München, Paris) sind aus dem 11. Jahrhundert. Da in ihnen aber der Text schon umgestellt ist, gehen sie auf eine ältere Fassung zurück, vielleicht aus der Zeit kurz vor Gerbert. Könnte man als Aufenthalt des Verfassers Luxeuil oder Corbie denken, in dessen Scriptorium viele Handschriften, darunter auch gromatische und geometrische, entstanden sind, und dies schon im 8., 9. und 10. Jahrhundert? (Siehe hiezu [Ullman 1964].) Der Verfasser hatte Kenntnis von dem Astrolab und dem arabischen Wort *(h)alhidada* für das drehbare Diopterlineal, durch dessen Öffnungen [*foramina*] man das Ziel anvisierte.

Für die Aufgabe, über eine unzugängliche Gegend hinweg die Höhe eines Berges zu bestimmen, hat er verschiedene Methoden.

In einem Beispiel (Aufg. Nr. 21, Zeichnung 60) wird auch die Größe des Beobachters berücksichtigt, da es--wie es an anderer Stelle heißt [Bubnov 1899, 324: *quia visum humi adjungere dif-*

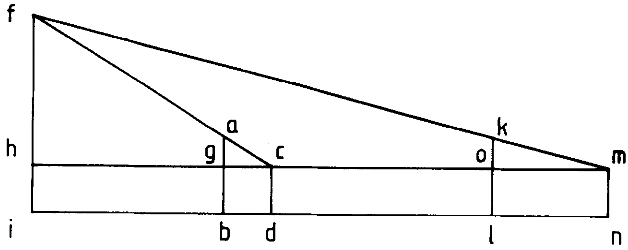

Abb. 5

ficile mensori]--schwer ist, mit dem Auge am Boden zu beobachten. In der Zeichnung bedeutet *ab* den Gnomon und *cd* die Größe des Beobachters bis zur Augenhöhe (siehe Abb.5).

Aus den Dreiecken *agc* und *kom* wird das Kathetenverhältnis bestimmt. Man sieht so, daß *hc* das gleiche Vielfache von *hf* ist wie *gc* von *ga*, also $ch = \kappa \cdot hf$. Ebenso $hm = \rho \cdot hf$. Da der Abstand *cm* bekannt ist, ist $(\rho - \kappa) \cdot hf = cm$. Der Text bringt nur die speziellen Zahlenwerte $\kappa = 2$ (bzw. 3) und $\rho = 4$ (bzw. 7). Da der Abstand gleich XXX Ellen genommen wurde, ist die Basis *ni* im ersten Fall doppelt so groß, im zweiten Fall viermal so groß wie die gesuchte Berghöhe.

Eine andere Methode wird in den Aufgaben Nr. 2 und 3 (Zeichnung 43, 44) verwendet (siehe Abb. 6). Man sieht aus der Zeichnung, daß diesmal mit dem Astrolab gearbeitet wurde, das symbolisch durch einen kleinen Kreis angedeutet ist. An den beiden Visierlinien steht, daß bei der Ablesung das Lot die Einstellung 4 bzw. 3 anzeigte. Wir zeichnen zwei Quadranten in die Abbildung 7 ein.

Da gewöhnlich die Seite des Quadranten in 12 Teile geteilt ist, ergibt sich aus der Ähnlichkeit der Dreiecke

$$(1)\ b:h = 12:4 \quad \text{und} \quad (2)\ (b+d):h = 12:3.$$

Somit ist $b + d - b = d = 4h - 3h = h$. Es ist also die Berghöhe in diesem Fall gleich dem Abstand, den man kennt und der in der Aufgabe mit 40 erscheint. Im Text wird aber ein Instrument

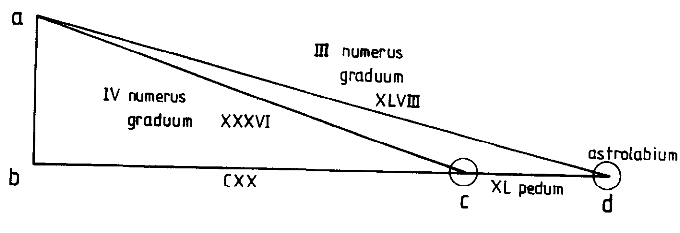

Abb. 6

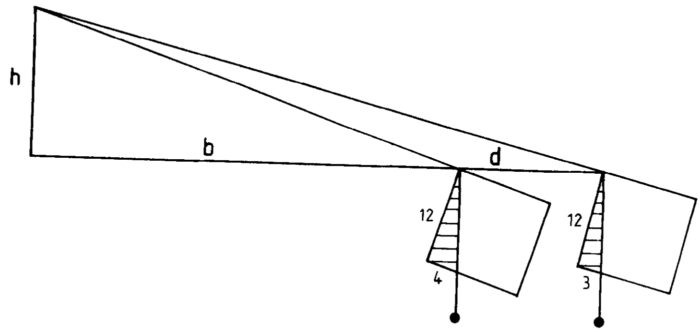

Abb. 7

angenommen, dessen Seite 144 Einheiten hat. Dann ist

$$d = \frac{144h}{36} - \frac{144h}{48} = \frac{144h(48-36)}{36 \cdot 48} = h.$$

In Nr. 3 gibt der Autor noch weitere spezielle Zahlenbeispiele.

Aus all diesen Zeichnungen bietet sich ein geometrisches Problem an, nämlich die Berechnung der Höhe, der Projektion [*ejectura*] und der Fläche eines schiefwinkeligen Dreiecks, was in der 2. Aufgabe des 4. Buches der *G.i.a.* auch durchgeführt wird. Dies könnte die Vermutung von Ullman [1964, 285] bestätigen, der in den zahlreichen Vermessungsschriften des Mittelalters ein Zeichen dafür sieht, daß diese nicht nur der Erwerbung praktischer Kenntnisse dienten, sondern daß aus ihnen auch das Material für den Unterricht im Quadrivium gewonnen wurde (solange der gesamte Euklid noch nicht zur Verfügung stand).

Eine andere frühe gromatisch-geometrische Abhandlung ist die *Practica geometriae* des Hugo de Sancto Victore [Baron 1956]. In den Aufgaben hat er all das, was aus der *Geometria incerti auctoris* zu lernen war; er hat auch die Aufgabe, bei der der *numerus graduum* 4 und 3 war, und obwohl er sagt, daß die Quadrantenseite in 12 Grade eingeteilt ist, verwendet er--wie die *G.i.a.*--die überflüssigen Zahlen 36 und 48. Hugo, der aus Nordfrankreich stammt, lebte zuerst in Marseille und lehrte in Paris, wo er 1141 starb. Ebenfalls in Paris entstand in der Mitte des 14. Jahrhunderts die *Practica geometriae* des Domenicus de Clavasio, die in zahlreichen Handschriften verbreitet wurde [Busard 1965].

So ist unsere Reise von China nach Paris zu Ende.

LITERATUR

Banerji, H. C. 1927. *Colebrooke's translation of the "Lilavati,"* 2. Auflage. Calcutta: Sakha Press.

Baron, R. 1956. Hugonis de Sancto Victore "Practica geometriae. *Osiris* 12, 176-224.
Boncompagni, B. 1862. *Scritti di Leonardo Pisano*, Vol. II. Rom.
Bubnov, N. 1899. *Gerberti opera mathematica*. Berlin: Friedländer.
Busard, H. L. L. 1965. The Practica geometriae of Dominicus de Clavasio. *Archive for History of Exact Sciences* 2, 520-575.
Chiu Chang Suan Shu. 1968. *Neun Bücher arithmetischer Technik* (Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften, N.F., Band 4). Braunschweig.
Colebrooke, H. T. 1917. *Algebra, with arithmetic and mensuration, from the Sanskrit of Brahmegupta and Bhāscara*. London: Murray.
Elfering, K. 1975. *Die Mathematik des Āryabhaṭa I*. München.
Heron. 1903. *Heronis Alexandrini opera quae supersunt omnia*, Vol. III. Leipzig: Teubner.
Kennedy, E. S. 1976. *The exhaustive treatise of shadows by Abu al-Rayḥān Muḥammad b. Aḥmad al-Bīrūnī*. Vol. I Translation, Vol. II Commentary, Aleppo (Institute for the History of Arabic Science).
Kogelschatz, H. 1981. Bibliographische Daten zum frühen mathematischen Schrifttum Chinas im Umfeld der "Zehn mathematischen Klassiker." In *Veröffentlichungen des Forschungsinstituts des Deutschen Museums für die Geschichte der Naturwissenschaften und der Technik*, Reihe B. München.
Ullman, B. L. 1964. Geometry in the mediaeval quadrivium. In *Studi di bibliografia e di storia in onore di Tammaro de Marinis*, Vol. IV, pp. 263-285. Rom.
van Hée, L. S.J. 1938. Le classique de l'île maritime. ouvrage chinois du III^e siècle. *Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik*, Abteilung B, 2, 255-280.